J. Math. Pures Appl.,
76, 1997, *p.* 851-858

LA TOPOLOGIE À L'INFINI DES VARIÉTÉS À GÉOMÉTRIE BORNÉE ET CROISSANCE LINÉAIRE

Par Louis FUNAR et Renata GRIMALDI (1)

ABSTRACT. – We study the topology at infinity of a non compact riemannian manifold with bounded geometry and linear growth-type.

Introduction

Dans l'article [5] on a montré que sur une variété non compacte qui est à topologie finie à l'infini (*voir* la déf. 2) il existe une métrique riemannienne à géométrie bornée (*voir* la déf. 1) et à croissance exactement linéaire.

Dans ce travail, on étudie la topologie à l'infini des variétés à géométrie bornée et à croissance linéaire et on démontre que la réciproque est aussi vraie:

THÉORÈME 1. – *Si M est une variété non compacte qui admet une métrique riemannienne à géométrie bornée et à croissance linéaire, alors M est à topologie finie à l'infini.*

THÉORÈME 2. – *Si M est une variété non compacte qui admet une métrique riemannienne à géométrie bornée et à croissance linéaire, alors M n'a qu'un nombre fini de bouts.*

Les auteurs tiennent à remercier M. Gromov et P. Pansu pour des fructueuses discussions.

En outre, une partie de ce travail a été effectuée pendant le séjour du premier auteur à l'Université de Pisa dont l'on remercie pour son hospitalité.

1. Variétés à géométrie bornée

DÉFINITION 1. – *Une variété riemannienne (M, g) est à géométrie bornée si la courbure sectionnelle K_g et le rayon d'injectivité i_g satisfont les inégalités suivantes:*

$$|K_g| \leq 1, \; i_g \geq 1.$$

(1) Travail réalisé dans le groupe G.N.S.A.G.A. du C.N.R. et avec le concours du M.U.R.S.T. d'Italie et de l'European Fellowship Contract ERBCHBGCT 920011.
1991 MSC: 53 C 23.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES. – 0021-7824/97/10

La variété M est dite à *croissance linéaire* s'il existe une constante a telle que le volume des boules métriques B_r de rayon r satisfait

$$\operatorname{vol} B_r \leq a \cdot r$$

Remarque 1. – Si la variété M est à géométrie bornée alors la croissance du volume des boules B_r est au moins linéaire, c'est-à-dire :

$$\operatorname{vol} B_r \geq c \cdot r$$

pour une constante $c > 0$ qui ne dépend que de la dimension de M (*voir* [6]).

DÉFINITION 2. – *Soit M une variété non-compacte de dimension n. On dit que M est à topologie finie à l'infini si elle admet une exhaustion*

$$M = \bigcup_{i>0} W_i, \; W_i \subset int\, W_{i+1}$$

par des sous-variétés compactes dont les bords $V_i = \partial W_i$ soient deux-à-deux difféomorphes.

On peut formuler maintenant le résultat principal :

THÉORÈME 1. – *Si M admet une métrique à géométrie bornée et croissance linéaire alors M est à topologie finie à l'infini.*

La preuve du théorème repose sur les trois lemmes qui suivent :

LEMME 1. – *Étant données les constantes m, k_0, i_0, v_0, la collection des variétés fermées V de dimension m qui admettent des métriques satisfaisant :*

$$|K| \leq k_0, \; i \geq i_0 > 0, \; vol\, V \leq v_0$$

ne contient qu'un nombre fini $c(m, k_0, i_0, v_0)$ de types de difféomorphismes.

LEMME 2. – *Il existe les constantes c, γ (qui ne dépendent que de la dimension) telles que : pour chaque variété M de dimension n à géométrie bornée et croissance linéaire il existe une exhaustion de M par des sous-variétés compactes W_j de bord V_j vérifiant les inégalités*

$$vol\, V_j \leq \gamma, \; \|II_{V_j}\| \leq c,$$

pour tous les j, où II_V est la deuxième forme fondamentale de la sous-variété $V \subset M$.

LEMME 3. – *Si M est à géométrie bornée alors il existe des constantes α, β telles que pour toute sous-variété fermée $V \subset M$ de codimension 1 la condition*

$$\|II_V\| \leq c$$

entraîne aussi

$$|K_V| \leq \alpha, \; i_V \geq \beta > 0.$$

De plus α et β ne dépendent que de c et de la dimension n.

Preuve du théorème. – En supposant connus les lemmes 1, 2, 3 :

Conformément au lemme 2 il existe une suite $\{V_j\}$ de sous-variétés fermées, deux-à-deux disjointes, sans points d'accumulation et qui vérifie

$$\|II_{V_j}\| \leq c, \ \mathrm{vol}\, V_j \leq \gamma. \tag{1}$$

Ensuite le lemme 3 entraîne l'existence des constantes α, β telles que :

$$|K_{V_j}| \leq \alpha, \ i_{V_j} \geq \beta > 0. \tag{2}$$

La collection des variétés V satisfaisant (1) et (2) ne contient qu'un nombre fini de classes de difféomorphisme (par le lemme 1) donc il y a une sous-suite V_{j_k} dont les termes sont deux-à-deux difféomorphes. Les W_{i_k} correspondantes forment une exhaustion de M par des sous-variétés compactes, donc M est à topologie finie à l'infini. □

Preuve du lemme 1. – On suit de près la preuve du théorème de finitude de Cheeger [2] donnée dans Chavel [1], p. 340. Soit N_ε le nombre des points d'une ε-discrétisation. Alors N_ε est majoré par le nombre maximal d'éléments d'un empilement avec des boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.

Mais une boule de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ a le volume plus grand que $c\frac{\varepsilon}{2}$, ou $c > 0$ est une constante qui ne dépend que de k_0 et i_0.

Comme le volume total est inférieur à v_0 il résulte

$$N_\varepsilon \leq \frac{2v_0}{c\varepsilon}$$

donc N_ε admet une majoration uniforme.

Le reste de la preuve est identique à celle donnée dans [1].

Preuve du lemme 2. – On considère les anneaux

$$A_n = B_{n+1} - \mathrm{int}\, B_n,$$

où $B_n = B_n(p)$ est la boule de rayon n centrée en p.

Sous-lemme 2.1. – Il existe une sous-suite A_{n_k} telle que $\mathrm{vol}\, A_{n_k} \leq c$. On peut prendre $c = (1 + \varepsilon)a$, $\varepsilon > 0$.

Preuve. – Soit $a_j = \mathrm{vol}\, A_j$. Alors on a :

$$\mathrm{vol}\, B_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j.$$

Par réduction à l'absurde on suppose que la suite désirée n'existerait pas : alors il existe N tel que

$$\mathrm{vol}\, A_j = a_j > c = (1 + \varepsilon)a,$$

pour tout $j \geq N$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}\operatorname{vol} B_{k+N+1} = \sum_{j=1}^{k+N+1} a_j = \sum_{j=1}^{N} a_j + \\ + \sum_{j=N+1}^{k+N+1} a_j > ka(1+\varepsilon) + \sum_{j=1}^{N} a_j.\end{aligned}$$

D'autre part on sait que

$$\operatorname{vol} B_{k+N+1} \leq a(k+N+1).$$

Si on fait tendre k vers l'infini on obtient une contradiction. □

Soit maintenant, pour $X \subset M$ un sous-ensemble quelconque

$$T_r(X) = \{x \in M;\ d(x, X) \leq r\} \subset M.$$

On va considérer dans la suite $X = S\left(n+\frac{1}{2}, p\right)$, la sphère de rayon $n+\frac{1}{2}$ centrée en p.

Sous-lemme 2.2; on a :

$$T_{1/2} S\left(n+\frac{1}{2}, p\right) \subseteq A_n.$$

Preuve.

(i) Soit d'abord $x \in T_{1/2}\ S\left(n+\frac{1}{2}, p\right)$ donc tel que

$$d\left(x, S\left(n+\frac{1}{2}, p\right)\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Comme la sphère $S\left(n+\frac{1}{2}, p\right)$ est compacte, la fonction continue $d(x, y), y \in S\left(n+\frac{1}{2}, p\right)$ avec x fixé admet un point de minimum, disons $q \in S\left(n+\frac{1}{2}, p\right)$. Alors, il vient :

$$d(x, p) \leq d(x, q) + d(q, p) \leq \frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} = n + 1,$$

c'est-à-dire que $x \in B_{n+1}$.

(ii) L'inégalité du triangle nous donne aussi :

$$d(x, p) \geq |d(x, q) - d(q, p)| = n$$

donc $x \notin \operatorname{int} B_n$. Il en résulte que $x \in A_n$. □

On peut appliquer maintenant le théorème de Cheeger-Gromov (*voir* [4]) : pour tout $X \subset M$ il existe une sous-variété U de la même dimension que M telle que

$$X \subset U \subset T_{1/2}X$$

$$\operatorname{vol}(\partial U) \leq 2c(n)\operatorname{vol}(T_{1/2}X - X)$$

$$\|II_{\partial U}\| \leq 2c(n)$$

où $c(n)$ ne dépend que de la dimension n de M.

On choisit $X = S\left(n_k + \frac{1}{2}, p\right)$ dont les n_k sont donnés par la suite A_{n_k} obtenue dans le sous-lemme 2.1.

On trouve donc les sous-variétés $\partial U_k \subset A_{n_k}$ telles que :

$$S\left(n_k + \frac{1}{2}, p\right) \subset U_k \subset A_{n_k} \qquad \text{(par le sous-lemme 2.2),}$$

$$\operatorname{vol}\partial U_k \leq 2c(n)\operatorname{vol}A_{n_k} \leq 2c(n)a(1+\varepsilon) \qquad \text{(par le sous-lemme 2.1),}$$

$$\|II_{\partial U_k}\| \leq 2c(n).$$

Maintenant on remarque qu'à la place du rayon $r = \frac{1}{2}$ des anneaux on aurait pu choisir $r = \frac{1}{2} - \delta$, $\delta > 0$ petit. Alors les nouveaux $\partial U_k'$ qu'on retrouve en appliquant le théorème de Cheeger-Gromov sont contenus dans des anneaux rétrécis $B_{n+1-\delta} - \operatorname{int} B_{n+\delta}$ qui sont disjoints. Donc $\partial U_k'$ sont disjoints ce que l'on peut supposer aussi pour les ∂U_k obtenus ci-dessus. Étant compactes et situées dans des anneaux qui s'approchent de l'infini ces sous-variétés n'ont pas des points d'accumulation, ce qui conclût la preuve du lemme 2. □

Preuve du lemme 3. – Soit R^V, R^M les tenseurs de courbure dans V et M respectivement. Le théorème de Gauss nous donne

$$\begin{aligned}\langle R^V(X,Y)Z,W\rangle =& \langle R^M(X,Y)Z,W\rangle +\\ &+ II(X,X)II(Y,Y) - II(X,Y)^2.\end{aligned}$$

Si $\{X, Y\}$ est un repère orthonormal de la facette σ qui est tangente à V alors :

$$\begin{aligned}|K_V(\sigma)| &\leq |K_M(\sigma)| + II(X,X)II(Y,Y) - II(X,Y)^2 \leq\\ &\leq |K_M(\sigma)| + 2c^2 \leq 1 + 2c^2.\end{aligned}$$

On peut donc choisir $\alpha = 1 + 2c^2$.

Sous-lemme 3.1. – Dans les hypothèses du lemme 3 si l'on avait des variétés V avec le rayon d'injectivité arbitrairement petit alors on pourrait trouver des variétés V dont la longueur minimale des géodésiques fermées est arbitrairement petite.

Preuve. – Il suit de [3] que $K_V \leq \alpha$ entraîne qu'il n'existe pas points conjugués à distance inférieure à $\pi/\sqrt{\alpha}$ sur une géodésique minimale. Donc si V est telle que

$i_V \leq \beta < \pi/\sqrt{1+2c^2}$, d'après le lemme 5.6 p. 95 de [3] il existe une géodésique fermée de longueur inferieure à 2β dans V. □

On note par ∇^M la connexion de Levi-Civita dans M. On remarque que pour $c \subset V \subset M$ une géodésique dans V on a

$$|\nabla^M_{\dot{c}}\dot{c}| \leq \|II_V\|.$$

Donc si V satisfait les hypothèses du lemme 3 on a une majoration pour la courbure géodésique de $c \subset V$.

Sous-lemme 3.2. – Soit M une variété de courbure sectionnelle $|K_M| \leq k$ et de rayon d'injectivité $i_M > 0$.

Si c est une courbe fermée dans M telle que

$$|\nabla^M_{\dot{c}}\dot{c}| \leq A,$$

alors

$$\text{longueur}(c) \geq \min\left(\frac{1}{10}i_M, \frac{1}{10k}, \frac{1}{A}\right).$$

Remarque. – Cette assertion nous donne une minoration uniforme du rayon d'injectivité de toutes les sous-variétés V considérées dans le lemme 3 (du sous-lemme 3.1) en achevant la preuve du lemme 3.

Preuve 3.2. – Soit ℓ la longueur du lacet géodésique naturellement paramétré c dont le point initial est $q = c(0)$. On fixe un point $p \in M$ ayant les propriétés

(1) $$d(p,q) = d < i_M,$$

(la valeur de d on va la fixer dans la suite, telle que $\ell \ll d \ll i_M$).

(2) la géodésique minimisante dans M qui passe par p et q a pour vecteur tangent $\dot{c}(0)$ en q.

On suppose par l'absurde que ℓ est plus petit que

$$\min\left(\frac{1}{10}i_M, \frac{1}{10k}, \frac{1}{A}\right).$$

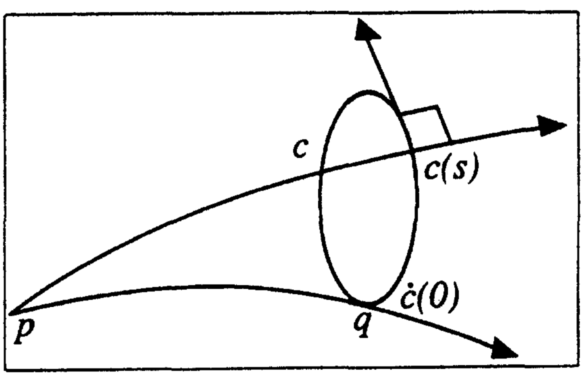

Fig. 1

Soit $u(x) = d(p, x)$. On a donc $\operatorname{grad} u(q) = \dot{c}(0)$.

Il suit de [7], lemme 8.23, qu'on a une estimation uniforme de la hessienne de u

$$\|\text{Hess}_y(u)\| \leq \frac{k\sinh(2ku)}{2\sin^2(ku)}.$$

Remarquons que $u(t) = u(c(t))$ vérifie :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \langle \dot{c}, \operatorname{grad} u\rangle \\ \ddot{u} &= \langle \nabla_{\dot{c}}\dot{c}, \operatorname{grad} u\rangle + \operatorname{Hess} u(\dot{c}, \dot{c}).\end{aligned}$$

Comme c est un lacet fermé, il existe $s \in [o, \ell]$ tel que $\dot{u}(s) = 0$. Il suit

$$\begin{aligned}\|\ddot{u}(t)\| &\leq \|\langle \nabla_{\dot{c}}\dot{c}, \operatorname{grad} u\rangle\| + \|\operatorname{Hess} u(\dot{c}, \dot{c})\| \leq \\ &\leq \|\nabla_{\dot{c}}\dot{c}\| + \frac{k\sinh(2ku)}{2\sin^2(ku)}.\end{aligned}$$

Supposons que $d > 4\ell$. Alors $u(t) \geq d - \ell > \frac{d}{2}$. En outre pour $kd < \frac{1}{10}$ on a

$$\frac{k\sinh(2ku)}{2\sin^2(ku)} \leq \frac{2}{u} \leq \frac{4}{d},$$

car $\frac{k\sinh(2ku)}{2\sin^2(ku)} \sim \frac{1}{u}$ autour de $u \sim 0$. On trouve alors :

$$1 = |\dot{u}(s) - \dot{u}(0)| = \left|\int_0^s \ddot{u}(t)\right| \leq \int_0^s |\ddot{u}(t)|dt \leq \left(A + \frac{4}{d}\right)s.$$

Mais on a :

$$\ell \geq s \geq \frac{1}{A + \frac{4}{d}} > \frac{1}{A};$$

ce qui donne une contradiction. Cela achève la preuve du sous-lemme 3.2, et par la remarque ci-dessus du lemme 3. □

THÉORÈME 2. – *Une variété à géométrie bornée et croissance linéaire n'a qu'un nombre fini de bouts.*

Preuve. – Soit $K \subset M$ un compact arbitraire.

Il existe un k tel que $K \subset B_{n_k}$ ou n_k est la suite qu'on a obtenue dans le sous-lemme 2.1.

On note par N le nombre de composantes connexes non compactes de $M - B_{n_k}$. On peut alors choisir une boule $B_{1/2}(x_i)$ dans chaque composante telle que :

$$d(x_i, p) = n_k + \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Comme ces composantes sont disjointes les boules $B_{1/2}(x_i)$ sont disjointes et (par un argument identique à celui qu'on a utilisé en sous-lemme 2.2) contenues dans A_{n_k}. D'autre part la remarque 1 nous dit que

$$\operatorname{vol} B_{1/2}(x_i) \geq \frac{c}{2}$$

mais le volume total de boules n'excède pas

$$\operatorname{vol} A_{n_k} \leq a(1+\varepsilon).$$

Il résulte que $N \leq \dfrac{2a(1+\varepsilon)}{c}$ où a et c sont des constantes.

Donc tout compact K est contenu dans un autre dont le complémentaire dans M n'a qu'au plus $\dfrac{2a(1+\varepsilon)}{c}$ composantes, ce qui finit la preuve. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. CHAVEL, Riemannian Geometry, *Acad. Press*, 1984.

[2] J. CHEEGER, Finiteness theorems for Riemannian manifolds, *Amer. J. Math.*, 1970, *92*, p. 61-75.

[3] J. CHEEGER et D. EBIN, Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland, 1975.

[4] J. CHEEGER et M. GROMOV, Chopping Riemannian manifolds, *Differential Geometry*, p. 85-94, *Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math.* 52, *Longman Sci. Tech. Harlow*, 1991.

[5] R. GRIMALDI, Croissance linéaire et géométrie bornée, *Geom. Dedicata* (à paraître).

[6] R. GRIMALDI, Sur la croissance des variétés riemanniennes, *An. Ştiinţ. Univ Ovidius, Constanţa*, 1996, sous presse.

[7] M. GROMOV, Structures métriques pour les variétés riemanniennes, rédigé par J. Lafontaine et P. Pansu, *Cedic.*, *Nathan*, 1981.

(Manuscrit reçu en septembre 1996.)

L. FUNAR
Institut Fourier B. 74,
Mathématiques, Université de Grenoble 1,
38402, Saint Martin d'Hères, France.
E-mail: funar@fourier.ujf-grenoble.fr

R. GRIMALDI
Università di Palermo
Facoltà di Ingegneria,
Dipartimento di Matematica ed Applicazioni,
Viale delle Scienze,
90128, Palermo (Italia).
E-mail: grimaldi@ipamat.math.unipa.it